ЗАДАНИЯ ДЛЯ 5-6 КЛАССОВ

Задание 1.

Фигуры называются равными, если они совпадают при наложении. Нарисуйте на клетчатой бумаге фигуру, показанную на рисунке. Разрежьте её так, чтобы полученные части оказались равными фигурами. Представьте результат в виде рисунка.

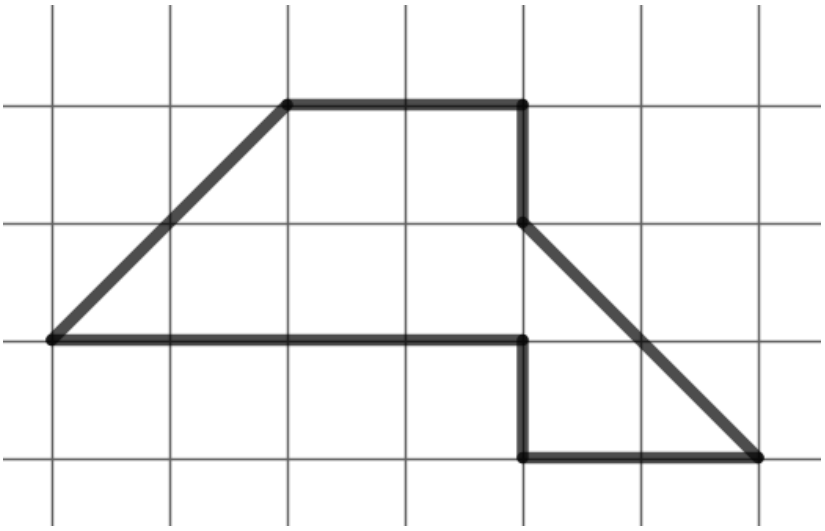

Рисунок 1

Баллы	Критерии (5-6 класс)
5	Представлен один из вариантов разрезания фигуры на равные части.
10	Представлено два варианта разрезания фигуры на равные части.
15	Представлено более двух вариантов разрезания фигуры на равные части. ИЛИ указан способ получения большего количества вариантов разрезания.

Решение:

Возможные варианты разрезания данной фигуры на равные части представлены на рисунке 2.

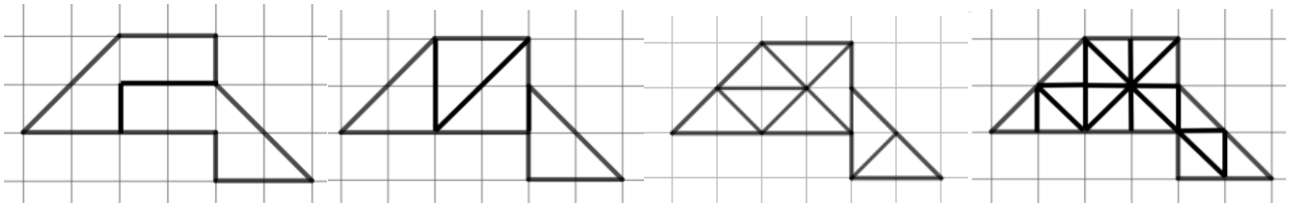

Рисунок 2

Задание 2. (Задача Я.И. Перельмана).

Рассмотрите рисунки 3 и 4 и решите задачу из книги Якова Перельмана «Живая математика»: «Когда 28 костей домино выложили в цепь на одном из его концов оказалось 5 очков. Сколько очков на другом её конце?»

Рисунок 3 - Игра в домино

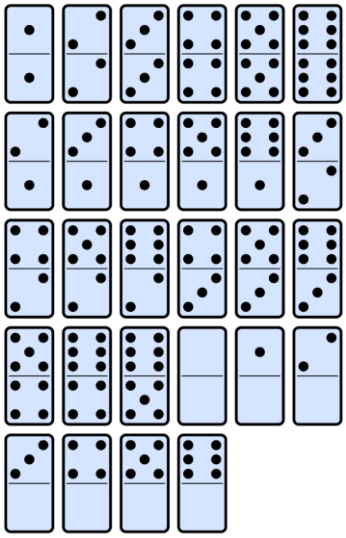

Рисунок 4 - Набор фишек для игры в домино

Баллы	Критерии (5-6 классы)
2	Представлен правильный ответ без обоснования или представлен пример выкладывания цепи, но в ней есть ошибка.
5	Представлен пример цепи с правильным ответом.
10	Приведены рассуждения, обосновывавшие, что результат не зависит от способа укладки фишек в цепи.

Решение:

Легко показать, что цепь из 28 костей домино должна кончаться тем же числом очков, каким она начинается. В самом деле: если бы было не так, то числа очков, оказавшиеся на концах цепи, повторялись бы нечетное число раз (внутри цепи числа очков лежат ведь парами); мы знаем, однако, что в полном наборе костей домино каждое число очков повторяется 8 раз, то есть четное число раз. Следовательно, сделанное нами допущение о неодинаковом числе очков на концах цепи – неправильно: числа очков должны быть одинаковы. (Рассуждения такого рода, как это, в математике называются «доказательствами от противного»)[1].

Задание 3. (Задача Я.И. Перельмана).

На поле 3 на 3 клетки играют двое (рисунок 5). Сначала первый игрок пишет какую-нибудь цифру, от 1 до 9, в одной из клеток поля. Затем второй пишет другую цифру, выбирая клетку так, чтобы первый игрок следующим ходом не мог закончить ряда из трёх цифр. Задача игроков расставить числа так, чтобы сумма чисел в одном

[1] Перельман Я.И. Живая математика. — 1959 // Библиотека Mathedu.Ru

ряду или столбце была равна 15. Выигрывает тот, который заканчивает своим ходом ряд с суммой 15 или же заполняет последнюю клетку всей решетки. У какого игрока – первого или второго в этой игре может быть выигрышная стратегия? Опиши действия, которые обязательно приведут его к выигрышу.

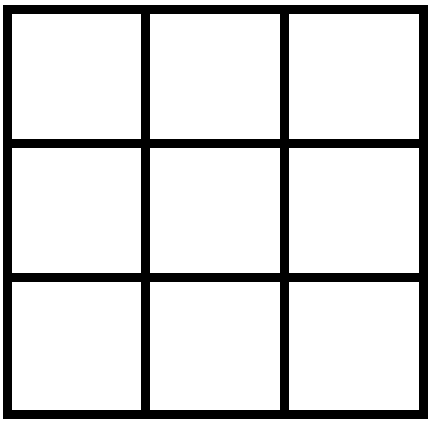

Рисунок 5 – Игровое поле

Баллы	Критерии (5-6 класс)
2	Представлен один из возможных случаев выигрышной стратегии.
5	Представлен один из возможных случаев выигрышной стратегии, при этом указано, что первому игроку нужно начать с 5.
10	Представлены все варианты выигрышной стратегии.

Решение:

Желая выиграть наверняка, надо начать с цифры 5. В какой клетке ее написать? Рассмотрим по порядку три возможных здесь случая.

1) Пятерка написана в средней клетке. Какую бы клетку ни выбрал партнер, можно написать в свободной клетке того же ряда $15 - 5 - x$ (где x – цифра, написанная противников) (рис. 6).

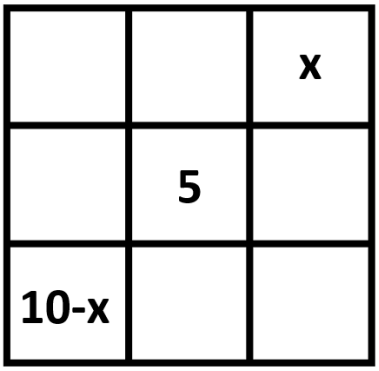

Рисунок 6

Число $15 - 5 - x$, то есть $10 - x$, разумеется, меньше 9.

2) Пятерка в одной из угловых клеток. Партнер выберет либо клетку x, либо клетку y. Если он напишет цифру x, вы должны написать $y = 10 - x$; если он напишет y, вы отвечаете цифрой $x = 10 - y$. В обоих случаях вы выигрываете.

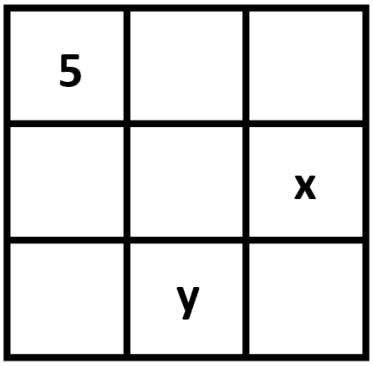

Рисунок 7

3) Пятерка в середине краевого ряда. Партнер может занять одну из четырех клеток *x, y, z* или *t*. На цифру *x* вы отвечаете $y = 10 - z$;

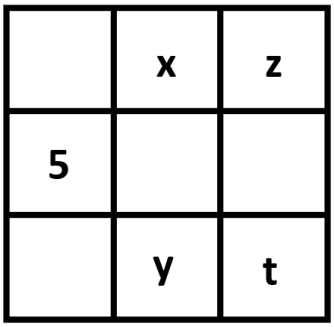

Рисунок 8

на y отвечаете $x = 10 - y$; на *z* отвечаете цифрой $t = 10 - z$; на *t* отвечаете $z = 15 - t$. Во всех случаях ваш выигрыш обеспечен[2].

Задание 4. (Задача из книги А.И. Сгибнева «Геометрия на подвижных чертежах», выпуск №19).

В GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) отметьте на полотне две произвольные точки А и В. Постройте квадрат, для которого одна из этих точек является вершиной, а другая – центром (точкой пересечения его диагоналей). Проверьте правильность построений, перемещая точку А и точку В. Задача решена верно, если квадрат остается квадратом.

Баллы	Критерии (5-6 класс)
1	Представлен квадрат (построения выполнены по точкам в узлах клеток), построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки)
3	Представлен квадрат (показано, что центр квадрата – это точка пересечения его диагоналей), но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки)
10	Правильно построено динамически устойчивое изображение квадрата, соответствующего условию задачи.

[2] Перельман Я. И. Занимательные задачи. — 1934 // Библиотека Mathedu.Ru

Решение:

Для решения задачи учащиеся должны знать, что центр квадрата – это точка пересечения его диагоналей, которые перпендикулярны и делятся этой точкой пополам.

Пример алгоритма построения в GeoGebra (рис. 9):

1) Построить точки A и B.
2) Построить прямую AB.
3) Построить через точку B прямую, перпендикулярную AB (прямая DE).
4) Построить окружность с центром в точке B и радиусом AB.
5) Построить точки пересечения окружности с прямыми (точки D, C, E).
6) Построить квадрат ADCE.

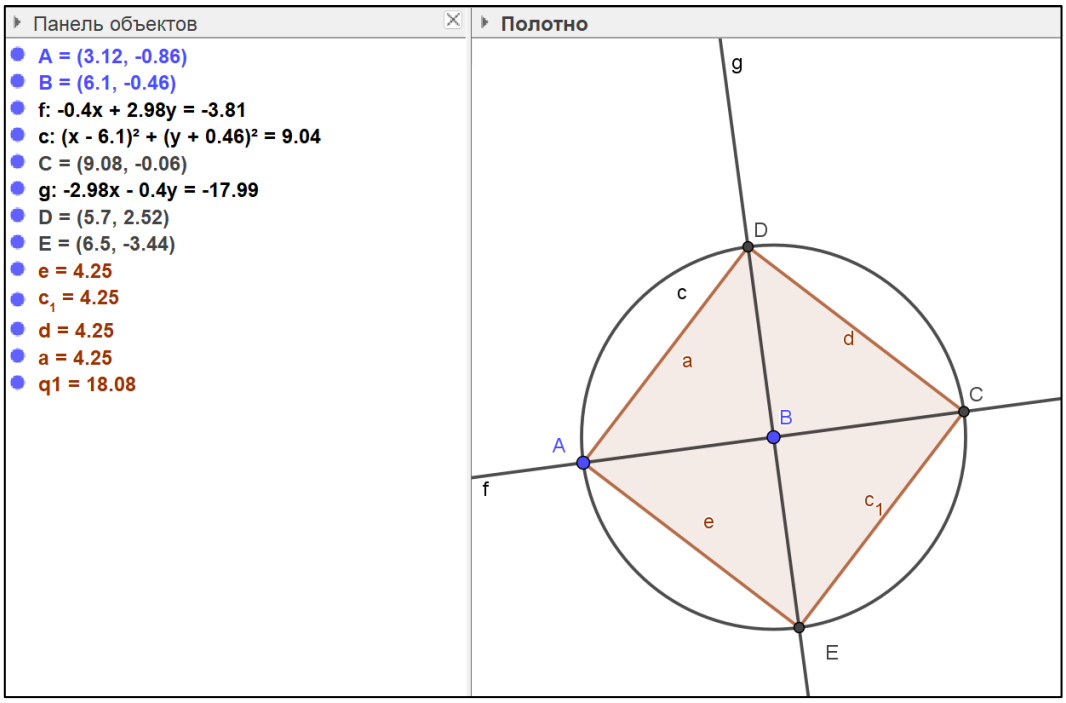

Рисунок 9

Задание 5.

Вдоль дороги стоят 4 поселка Арбузное, Вишнёвка, Сливовое и Дыневое не известно в каком порядке. Расстояние от Арбузного до Сливового – 16 км, от Арбузного до Вишневки – 18 км, от Вишневки до Дыневого – 15 км, а от Дыневого до Сливового – 19 км. В каком порядке находятся поселки и какое расстояние от первого до последнего поселка? Обоснуйте свой ответ.

Баллы	**Критерии (5-6 класс)**
1	Указано верное расстояние без обоснований
3	а) указан неверный порядок, б) указано верное расстояние без обоснований.
10	а) указан верный порядок без обоснований, б) указано верное расстояние без обоснований.
15	а) обосновано указаны крайние поселки, возможно, для средних указан неверный порядок, б) обосновано найдено верное расстояние.
20	а) указан и обоснован верный порядок поселков, б) обосновано найдено верное расстояние.

Решение:

Пусть A – Арбузное, B – Вишнёвка, C – Сливовое и D – Дыневое.

По условию AC = 16, AB = 18, BD = 15, DC = 19.

Выясним, какие поселки являются крайними. Самое большое расстояние из данных – между C и D. AB > AC, поэтому точка B не лежит на отрезке AC. Поэтому точки могут быть расположены так, как показано на рисунке 10. Но CD = 19 < 16 + 15 = CA + AB + BD – противоречие. Значит, C и D не могут быть крайними.

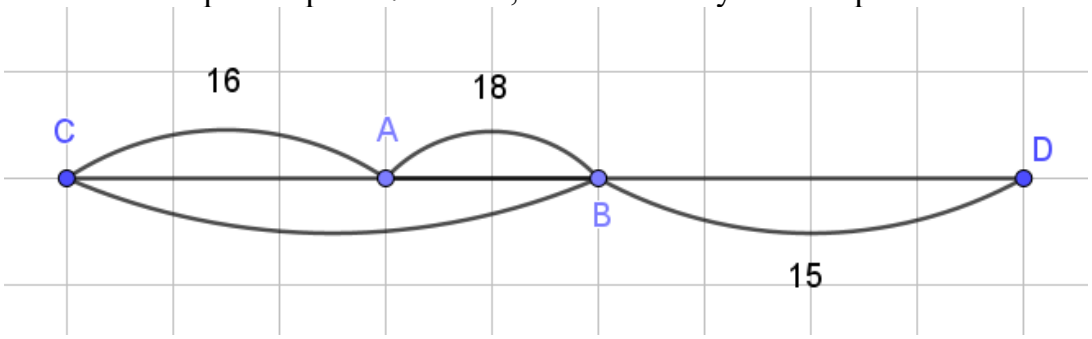

Рисунок 10

Заметим, что AC + AB = BD + DC = 34, что соответствует рис. 10. Отсюда следует, что точки A и D лежат на отрезке BC. Таким образом, расстояние между поселками равно 34 км и они находятся в таком порядке: Вишнёвка, Дыневое, Арбузное и Сливовое, или наоборот. Других вариантов нет.

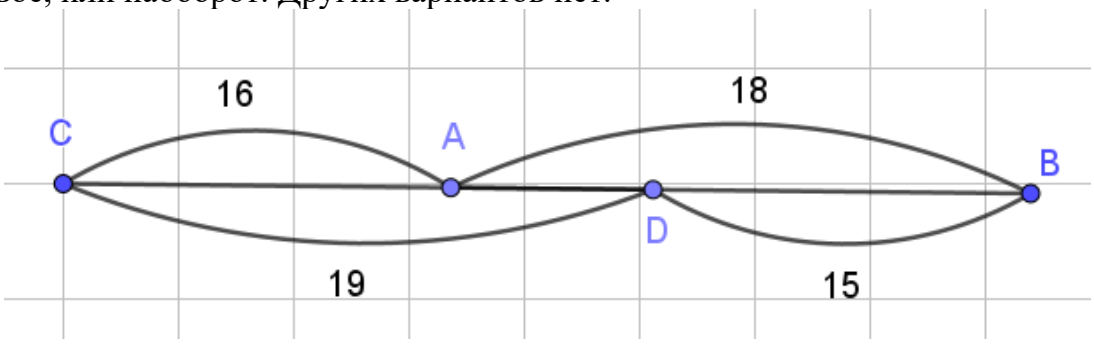

Рисунок 11

Ответ:

1) Поселки находятся в следующем порядке: Вишнёвка, Дыневое, Арбузное и Сливовое. Или наоборот – справа налево.

2) Расстояние от первого до последнего поселка равно 34 км.

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (5-6 классы)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

1) Вдоль дороги стоят 4 поселка Арбузное, Вишнёвка, Сливовое и Дыневое не известно в каком порядке. Расстояние от Арбузного до Сливового – 16 км, от Арбузного до Вишневки – 18 км, от Вишневки до Дыневого – 15 км, а от Дыневого до Сливового – 19 км. В каком порядке находятся поселки и какое расстояние от посёлка Арбузное до посёлка Дыневое. Обоснуйте свой ответ.

2) Вдоль дороги стоят 4 поселка Арбузное, Вишнёвка, Сливовое и Дыневое не известно в каком порядке. Расстояние от Арбузного до Сливового – 16 км, от Арбузного до Вишневки – 18 км, от Вишневки до Дыневого – 15 км, а от Дыневого до Сливового – 19 км. В каком порядке находятся поселки? Где необходимо построить школу, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии между первым и последним поселками. Обоснуйте свой ответ.