ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

Задание 1.

На клетчатой бумаге решили построить квадраты с вершинами в узлах сетки так, что их площади выражаются целыми числами от 1 до 10. Проверьте построением для каких чисел от 1 до 10 такое построение возможно, а для каких нет. Объясните полученный результат.

Баллы	Критерии (8 класс)
3	Представлены случаи построения квадратов с площадями 1, 4 и 9 клеток. Возможность построения подтверждена рисунками.
8	Представлены все случаи построения, соответствующие условию задания. Возможность построения подтверждена рисунками. Однако, нет объяснения, невозможности построения квадратов с площадью 3, 6 и 7.
10	Представлены все случаи построения, соответствующие условию задания с обоснованием. Возможность построения подтверждена рисунками. Представлено обоснование для каких целых чисел невозможно построить квадраты с вершинами в узлах сетки.

Решение:

Построение возможно для квадратов с площадями 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 клеток (рис. 1).

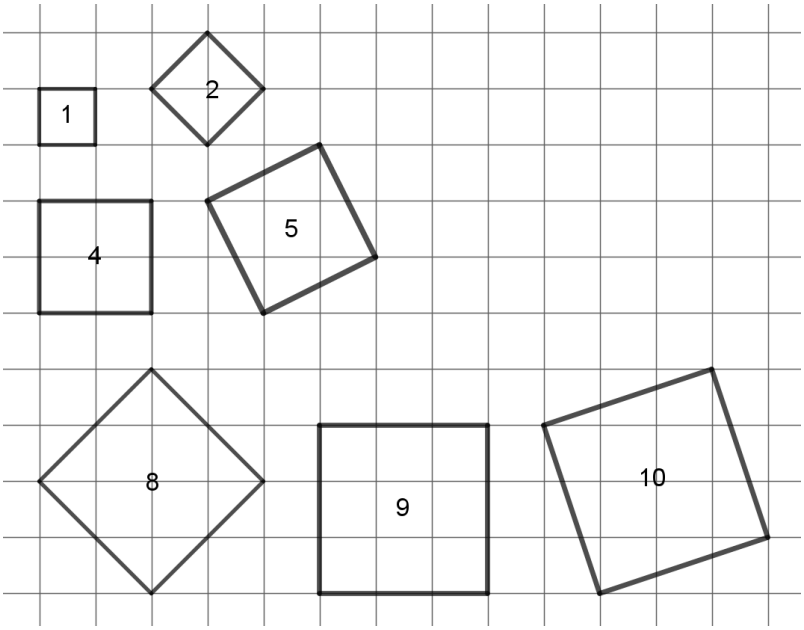

Рисунок 1

Сторону $\sqrt{3}$ нельзя построить, так как не существует целых значений x и y для которых $x^2 + y^2 = 3$. Это можно проверить экспериментально. Построим окружность с центром в узле сетки и радиусом $\sqrt{3}$ (рис. 2). Такая окружность не имеет пересечений с узлами сетки. Аналогично проверяется для $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$.

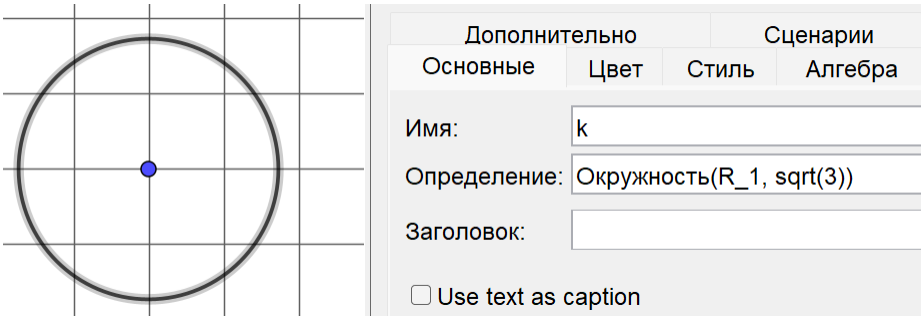

Рисунок 2

Задание 2. (Задача Я.И. Перельмана «Белая мышь») [1]**.**

Все 13 мышей, окружающие эту кошку, обречены попасть ей на обед. Но кошка желает съесть их в определенном порядке, – а именно, каждый раз она отсчитывает 13-ю мышь по кругу в том направлении, в каком эти мыши глядят, – и съедает её.

С какой мыши она должна начать, чтобы белая оказалась съеденной последней (рисунок 3)?

Рисунок 3

Баллы	Критерии (8 класс)
2	Представлен рисунок, где виден эксперимент, но ответ неверный.
10	Представлен правильный ответ, подтвержденный рисунком. ~~Правильным ответом считается тот, что подтвержден рисунком.~~

Решение:

Кошка должна съесть первой ту мышь, которая находится у кончика её хвоста (рис. 3). Попробуйте, начав с этой мышки счет по часовой стрелке, зачеркивать каждую 13-ую мышь, и вы убедитесь, что белая мышь будет зачеркнута последней.

[1] 2595837.pdf (azon.market)

Задание 3. (Задача Я.И. Перельмана «Игра в 32 наоборот»).

Играют вдвоём. Кладут на стол 32 спички. Тот, кто начинает играть, берет себе одну, две, три или четыре спички. Затем и другой берет себе сколько хочет спичек, но тоже не более 4. Потом опять первый берет не свыше 4 спичек. И так далее. Кто возьмёт последнюю спичку, тот и проиграет.

Опишите, как должен играть первый игрок, чтобы наверняка выиграть.

Баллы	Критерии (8 класс)
5	В рассуждениях есть идея о том, что в предпоследний ход на столе нужно оставить 6 спичек, или, первым ходом нужно взять одну спичку. Однако, нет описания стратегии: последовательности шагов, ведущих к выигрышу.
10	Представлено верное описание выигрышной стратегии.

Решение:

Решим задачу с конца. Последним ходом необходимо оставить партнеру на столе одну спичку и тогда выигрыш обеспечен: партнеру придется взять последнюю.

Чтобы наверняка последним ходом оставить на столе 1 спичку, необходимо предшествующим ходом оставить противнику ровно 1 + 5 = 6 спичек, а в предыдущий ход оставить на столе 6 + 5 = 11 спичек и так далее до 31. Таким образом, начиная игру, нужно взять 1 спичку, а в каждый последующий ход брать $5 - n$ спичек, где n – количество спичек, взятых противником.

Задание 4. (Задача из книги А.И. Сгибнева «Геометрия на подвижных чертежах», выпуск №19).

В GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) отметьте на оси Оу произвольную точку А, а внутри первого координатного угла произвольную точку В. Постройте прямоугольник в вершинами в этих точках так, чтобы одна из его вершин лежала на оси Ох. Проверьте правильность построений, перемещая точку А и точку В. Задача решена верно, если прямоугольник остается прямоугольником, а его вершины удовлетворяют описанным в задаче условиям.

Баллы	Критерии (8 класс)
1	Представлен прямоугольник, соответствующий условию задачи, но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки).
10	Правильно построено динамически устойчивое изображение прямоугольника, соответствующего условию задачи.

Решение:

Для построения учащимся нужно знать, что все углы прямоугольника прямые, а точка пересечения его диагоналей делит каждую из них пополам.

Пример алгоритма построения в GeoGebra (рис. 4):

1) Построить точку А на оси Оу.
2) Построить внутри первого координатного угла произвольную точку В.
3) Построить прямую ВС так, чтобы точка С лежала на оси Ох.
4) С помощью инструмента «Середина или центр» найти середину отрезка АС.

5) С помощью инструмента «Отражение относительно точки» построить точку B'.

6) Построить с помощью инструмента «Многоугольник» прямоугольник ABCB'.

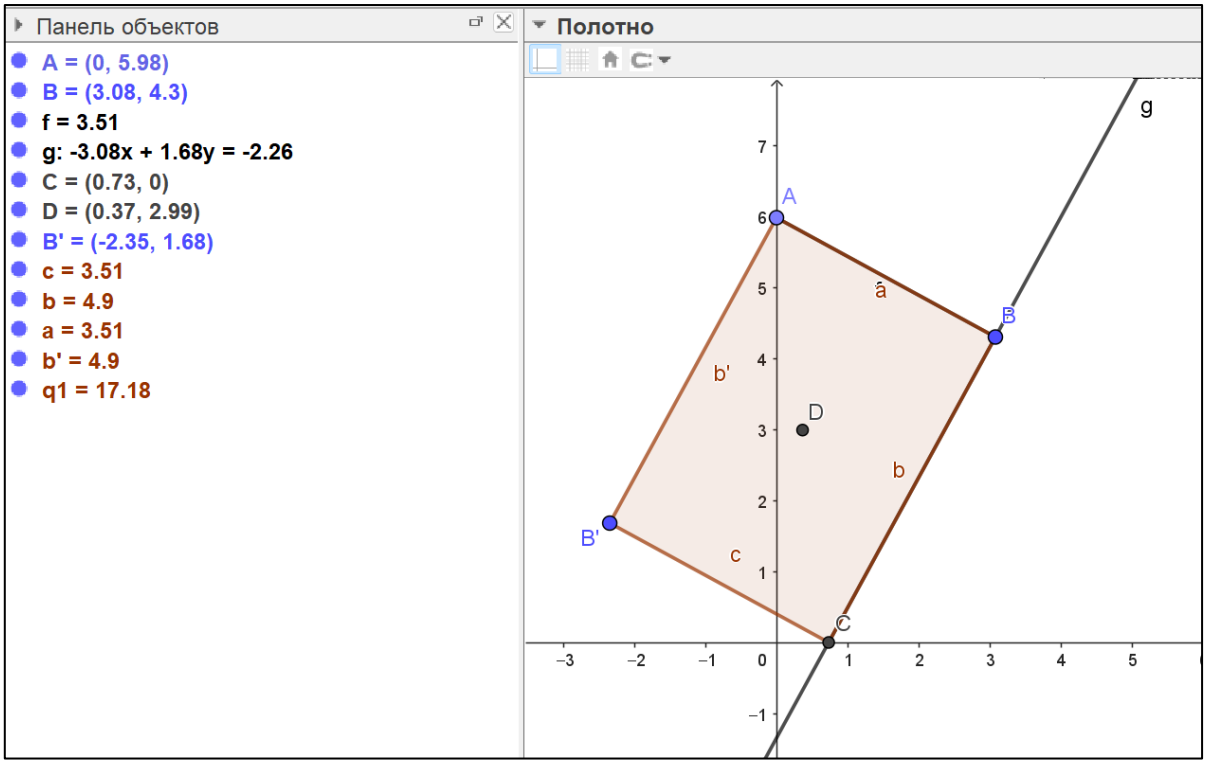

Рисунок 4

Задание 5. (Задача Р.К. Гордина) [2]**.**

Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника ABCD, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и CK пересекаются в точке T. Зависит ли отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT от вида четырехугольника ABCD? Обоснуйте свой ответ.

Баллы	Критерии (8 класс)
5	Построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами, но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки). Выводы не сделаны.
10	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Выводы сделаны на основании результатов эксперимента, но не обоснованы.
15	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделан один из выводов: 1) отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT не зависит от вида четырехугольника ABCD; 2) отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT равно 1. Приведено обоснование полученного вывода.

[2] Информация о задаче (problems.ru)

20	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделаны выводы, что отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT не зависит от вида четырехугольника ABCD и равно 1. Приведено обоснование полученного вывода.

Решение:

Построение:

Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, инструментом «Многоугольник» произвольный выпуклый четырехугольник ABCD. С помощью инструмента «Середина или центр» строим середину отрезка AC (точку K) и середину отрезка BC (точку M). Затем инструментом «Отрезок» строим отрезки AM, BK, CK и MD, с помощью инструмента «Пересечение» находим точки пересечения отрезков AM и BK (точка P), отрезков CK и MD (точка T). С помощью инструмента «Многоугольник» строим четырехугольник PMTK и треугольники ABP и CDT (рис. 5).

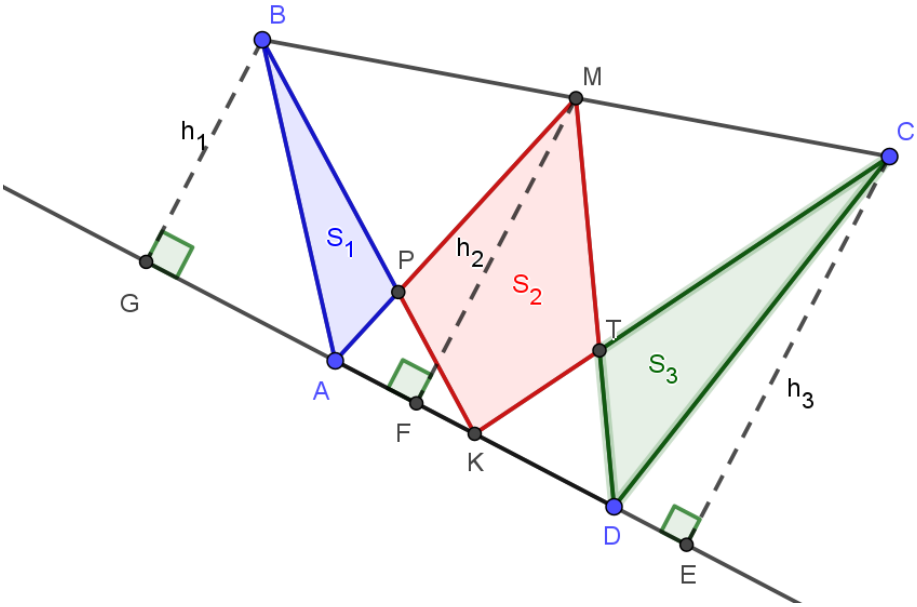

Рисунок 5

Поисковый эксперимент:

С помощью инструмента «Площадь» выводим на экран значения площадей этих фигур. В строку ввода вводим $\frac{S_2}{S_1+S_3}$

Меняем вид четырехугольника, перемещая точки A или D, и наблюдаем за результатом.

Гипотеза по данным эксперимента:

Отношение площади четырехугольника PMTK к сумме площадей треугольников ABP и CDT не зависит от вида четырехугольника ABCD и равно 1.

Доказательство:

$$S_2 = S_{\Delta AMD} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD}) = \frac{1}{2} \cdot 2AK \cdot \frac{h_1 + h_3}{2} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD})$$

$$S_1 + S_3 = S_{\Delta ABK} + S_{\Delta KCD} - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD}) = \frac{1}{2} \cdot AKh_1 + \frac{1}{2} \cdot AKh_3 - (S_{\Delta APK} + S_{\Delta KTD})$$

$$\frac{S_2}{S_1 + S_3} = 1$$

Ответ: не зависит, отношение равно 1.

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	Критерии (8 класс)
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника ABCD, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и CK пересекаются в точке T. Зависит ли отношение суммы площадей треугольников BMP и APK к сумме площадей треугольников KTD и CMT от вида четырехугольника ABCD? Обоснуйте свой ответ.

Точки M и K – середины сторон BC и AD выпуклого четырехугольника ABCD, отрезки AM и BK пересекаются в точке P, отрезки DM и CK пересекаются в точке T. Какую часть выпуклого четырехугольника ABCD занимает четырехугольник PMTK? Обоснуйте свой ответ.