ЗАДАНИЯ ДЛЯ 9 КЛАССА

Задание 1.

Учитель поставила перед классом задачу определить, сколько квадратов с вершинами в узлах квадратной сетки можно построить так, чтобы их площади выражались целыми числами из промежутка от 1 до 100.

Петя внес рацпредложение – построить все такие квадраты с площадями от 1 до 10, подсчитать их, а затем умножить это количество на 10.

Согласны ли вы с предложением Пети? Подтвердите свою позицию данными экспериментов.

Баллы	Критерии (9 класс)
3	Представлены построения квадратов с площадями 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 клеток. Существование квадратов подтверждена рисунками. Дальнейших рассуждений нет.
5	Представлены построения квадратов с площадями 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 клеток. Существование квадратов подтверждена рисунками. Сделан вывод о том, что предложение Пети неправильное. Но дальнейшие рассуждений не верны.
10	Представлен правильный ответ, подтверждённый экспериментами. Существование квадратов подтверждена рисунками.

Решение:

Предположение Пети неверно, так как в разных десятках может быть разное количество квадратов с целым значением площади. Например, в первом десятке таких квадратов 7 с площадями 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 клеток (рис. 1);

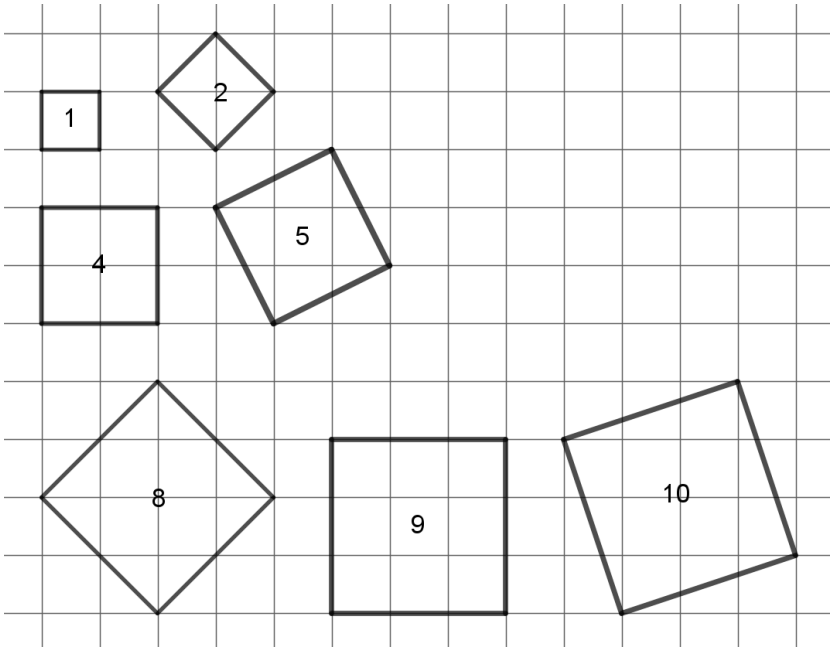

Рисунок 1

а во втором десятке таких квадратов 5 с площадями 13, 16, 17, 18, 20 клеток (рис. 2).

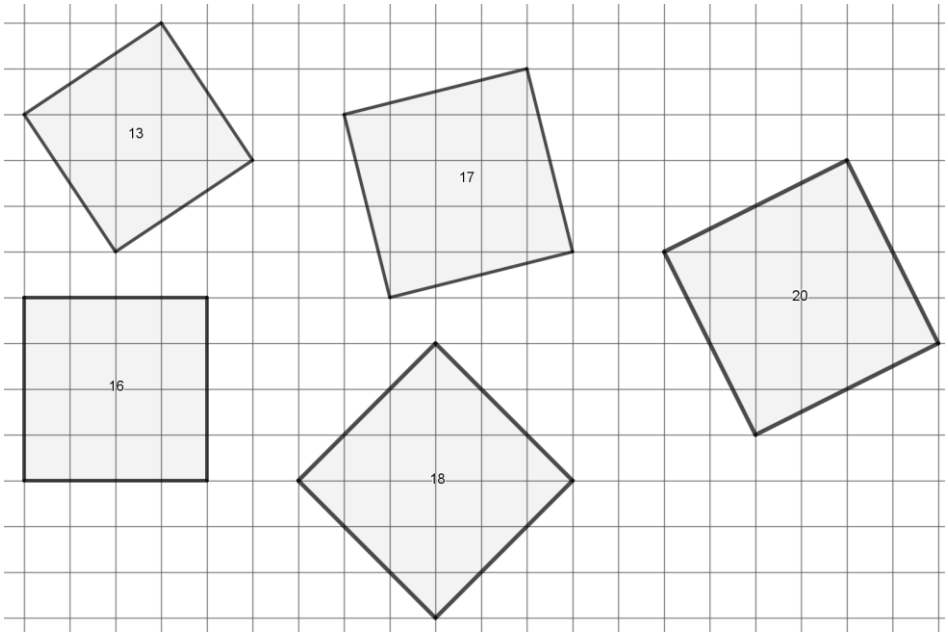

Рисунок 2

Задание 2. (Задача Я.И. Перельмана «Прогрессия из домино») [1]**.**

Вы видите на рисунке 3 шесть косточек домино, выложенных по правилам игры и отличающихся тем, что число очков на косточках (на двух половинах каждой косточки) возрастает на 1: начинаясь с 4, ряд состоит из следующих чисел очков: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

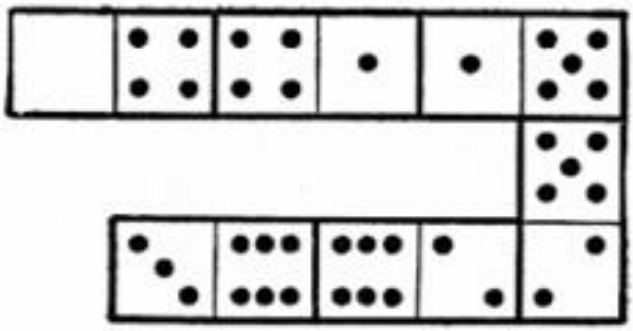

Рисунок 3

Такой рад чисел, которые возрастают (или убывают) на одну и ту же величину, называется «арифметической прогрессией». В нашем ряду каждое число больше предыдущего на 1; но в прогрессии может быть и любая другая «разность». Задача состоит в том, чтобы составить ещё несколько 6-косточковых прогрессий.

Баллы	Критерии (9 класс)
2	Представлены некоторые примеры прогрессий, но не все.
5	Представлен правильный ответ без обоснования.
10	Представлен правильный ответ с обоснованием.

[1] 2595837.pdf (azon.market)

Решение:

Примеры нескольких прогрессий с разностью 1 и 2:

разность	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0 – 1	1 – 1	1 – 2	2 – 2	2 – 3	3 – 3
1	0 – 2	2 – 1	1 – 3	3 – 2	2 – 4	4 – 3
1	1 – 3	3 – 2	2 – 4	4 – 3	3 – 5	5 – 4
2	0 – 0	0 – 2	2 – 2	2 – 4	4 – 4	4 – 6
2	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6
2	0 – 2	2 – 2	2 – 4	4 – 4	4 – 6	6 – 6
2	2 – 0	0 – 4	4 – 2	2 – 6	6 – 4	6 – 6

Всего 6-косточковых прогрессий можно составить 23. Начальные косточки их следующие:

a) для прогрессий с разностью 1:

0 — 0	1 — 1	2 — 1	2 — 2	3 — 2
0 — 1	2 — 0	3 — 0	3 — 1	2 — 4
1 — 0	0 — 3	0 — 4	1 — 4	3 — 5
0 — 2	1 — 2	1 — 3	2 — 3	3 — 4

b) для прогрессий с разностью 2:

0 – 0; 0 – 2; 0 – 1.

Задание 3. (Задача Я.И. Перельмана «Игра в 27»).

Играют вдвоём. Кладут на стол 27 спичек. Тот, кто начинает играть, берет себе одну, две, три или четыре спички. Затем и другой берет себе сколько хочет спичек, но тоже не более 4. Потом опять первый берет не свыше 4 спичек. И так далее. Выиграет тот, у кого по окончании окажется четное число спичек.

Опишите, в чем состоит секрет беспроигрышной игры?

Баллы	**Критерии (9 класс)**
5	В рассуждениях представлены идеи выигрышной стратегии для одного из вариантов: перед концом партии четное или нечетное число спичек.
10	Представлены верные рассуждения выигрышной стратегии.

Решение:

Для нахождения способа беспроигрышной игры надо исходить из следующих соображений:

1) Если у вас перед концом партии *нечетное* число спичек, вы должны оставить противнику 5 спичек, – и ваш выигрыш обеспечен. В самом деле: следующим ходом противник оставит вам 4, 3, 2, или 1 спичку; если 4 – берете 3 и выигрываете; если 3 – берете их и выигрываете; если 2 – берете 1 и выигрываете.

2) Если же перед концом игры у вас оказывается *четное* число спичек, то вы должны оставить противнику 6 или 7 спичек. В самом деле: проследим, как пойдет дальнейшая игра. Если противник следующим ходом оставляет вам 6 спичек, вы берете одну, обладая теперь уже нечетным числом спичек, спокойно оставляете противнику 5 спичек, с которыми он должен неизбежно проиграть. Если он оставит вам не 6, а 5 спичек, вы берете 4 и выигрываете. Если оставит 4, вы их берете и выигрываете. Если

оставит 3 – берете 2 и выигрываете. И наконец, если оставит 2, – вы выигрываете. Меньше двух он оставить не может.

Итак, способ беспроигрышной игры состоит в том, что, имея у себя нечетное число спичек, необходимо оставлять противнику на столе такое число их, которое на 1 меньше кратного 6, – то есть 5, 11, 17, 23; имея же четное число спичек, нужно оставить противнику на столе число, кратное 6, или на единицу больше, – то есть 6 или 7, 12 или 13, 18 или 19, 24 или 25. Нуль – четное число; поэтому, начиная игру, необходимо взять из 27 спичек две или три, а в дальнейшем поступать согласно предыдущему.

Задание 4. (Задача из книги А.И. Сгибнева «Геометрия на подвижных чертежах», выпуск №19).

В GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) отметьте на оси Оу произвольную точку А, а внутри первого координатного угла произвольную точку В. Постройте прямоугольник в вершинами в этих точках так, чтобы одна из его вершин лежала на оси Ох. Проверьте правильность построений, перемещая точку А и точку В. Задача решена верно, если прямоугольник остается прямоугольником, а его вершины удовлетворяют описанным в задаче условиям.

Баллы	**Критерии (9 класс)**
1	Представлен прямоугольник, соответствующий условию задачи, но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки).
10	Правильно построено динамически устойчивое изображение прямоугольника, соответствующего условию задачи.

Решение:

Для построения учащимся нужно знать, что все углы прямоугольника прямые, а точка пересечения его диагоналей делит каждую из них пополам.

Пример алгоритма построения в GeoGebra (рис. 4):

1) Построить точку А на оси Оу.
2) Построить внутри первого координатного угла произвольную точку В.
3) Построить прямую ВС так, чтобы точка С лежала на оси Ох.
4) С помощью инструмента «Середина или центр» найти середину отрезка АС.
5) С помощью инструмента «Отражение относительно точки» построить точку В'.
6) Построить с помощью инструмента «Многоугольник» прямоугольник АВСВ'.

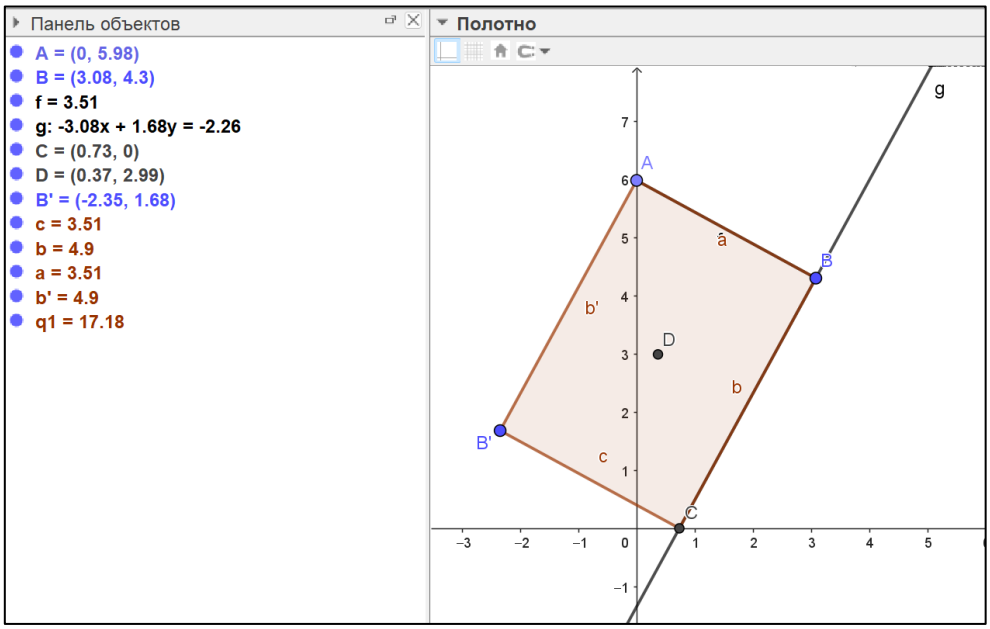

Рисунок 4

Задание 5. (Задача обратная к задаче А.Б. Ходулёва), исходная задача взята с замечательного сайта «Задачи» [2] проект МЦНМО.

На сторонах AB и BC квадрата ABCD выбраны соответственно точки M и N так, что угол MDN равен 45 градусам.

1) Установите, зависит ли периметр треугольника MBN от выбора точек M и N на сторонах квадрата.

2) Зависит ли и как периметр треугольника MBN от длины стороны квадрата равна a. Выразите эту зависимость формулой.

Докажите свой ответ.

Баллы	Критерии (9 класс)
5	Построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами, но построения являются динамически не устойчивыми (конструкция ломается при изменении положения какой-либо точки). Выводы не сделаны.
10	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Обоснования не верные.
15	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделан один из выводов: 1) периметр треугольника MNB зависит только от длины стороны квадрата, но не от положения точки M на его стороне AB; 2) периметр треугольника MNB равен 2a, где a – длина стороны квадрата. Приведено обоснование полученного вывода.
20	Верно построена конфигурация, описанная в условии задачи, компьютерными инструментами или циркулем и линейкой. Сделаны оба вывода. Приведено обоснование полученного вывода.

[2] Информация о задаче (problems.ru)

Решение:

Построение:

Для создания динамической модели геометрической конфигурации, описанной в условии, с помощью инструмента «Многоугольник» строим квадрат ABCD (рис. 5). С помощью инструмента «Точка на объекте» отмечаем точку M на стороне AB. Затем строим прямые через точки D и M, C и B. С помощью инструмента «Поворот вокруг точки» делаем поворот прямой DM вокруг точки D на 45°, отмечаем точку пересечения этой прямой со стороной квадрата BC – точку N. С помощью инструмента «Многоугольник» строим треугольник MBN.

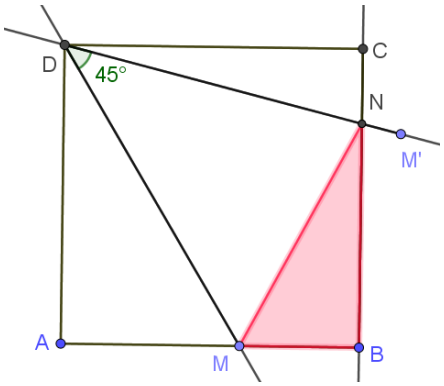

Рисунок 5

Поисковый эксперимент:

С помощью инструмента «Расстояние или длина» определяем периметр треугольника MNB, кликнув на область внутри треугольника (рис. 6). Перемещая точку M по стороне AB, наблюдаем за изменением периметра.

Гипотезы на основе данных компьютерного эксперимента:

1) Периметр треугольника MBN зависит только от длины стороны квадрата, но не от положения точки M на его стороне AB.

2) Периметр треугольника MBN равен: 2a, где a – длина стороны квадрата.

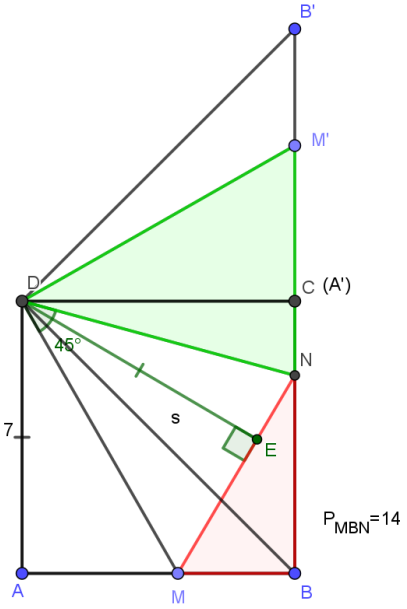

Рисунок 6

3) Если провести высоту в треугольнике DMN, то легко заметить, что справедливость гипотезы 1 следует из равества пар прямоугольных треугольников: $\Delta MAD = \Delta MED$; $\Delta CND = \Delta END$. Каждая пара этих треугольников имеет общую гипотенузу, сделовательно, для доказательства их равенства достаточно доказать: $AD = DE = DC$.

Доказательство:

1) Выполним поворот отрезка AB на 90° вокруг точки D против часовой стрелки. $R_D^{90^{\circ}}(A) = A' = C$; $R_D^{90^{\circ}}(B) = B' \Rightarrow R_D^{90^{\circ}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \in A'B'$.

2) Поворот сохраняет равенство отрезков и углов, следовательно: $\mathrm{DM} = \mathrm{DM}'$;

$$\angle ADM = \angle A'DM'.$$

3) $\Delta MDN = \Delta NDM'$ так как

$DN -$ общая, $\mathrm{DM} = \mathrm{DM}'$

$\angle M'DN = \angle M'DA' + \angle A'DN = \angle ADM + \angle CDN = 90^{\circ} - 45^{\circ} = 45^{\circ}$

4) $\Delta MDN = \Delta NDM' \Rightarrow DE = DC.$

Что и требовалось доказать.

5) $\Delta MAD = \Delta MED;\ \Delta CND = \Delta END$ по гипотенузе и катету.
Следовательно, $AM = ME; EN = NC.$

6) $P_{MNB} = AM + MB + BN + NC = 2AD$

Задание 6.

Изменяя чертеж к задаче №5, составьте как можно больше новых задач. Формулировки своих задач можно записать или на листе бумаги, или в графическом окне GeoGebra (или Живая геометрия, или Математический конструктор и т.п.) с помощью инструмента «Надпись».

Баллы	**Критерии (9 класс)**
1	В формулировке задачи изменены только числовые данные условия задачи 5.
3	Задача не развивает идеи задачи 5, но её формулировка полная и корректная.
8	Сформулирована корректная задача путем логического преобразования условия задачи 5.
10	Сформулированная корректная задача, развивающая идею задачи 5 на основе динамического преобразования чертежа.

Примеры задач:

1) На сторонах AB и BC квадрата ABCD выбраны соответственно точки M и N так, что угол MDN равен 45 градусам. Установите, зависит ли периметр треугольника MBN от выбора точек M и N на сторонах квадрата. Найдите отношение периметра треугольника MBN к периметру квадрата. Обоснуйте свой ответ.

2) На сторонах AB и BC квадрата ABCD выбраны соответственно точки M и N так, что угол MDN равен 45 градусам. В треугольнике MDN проведена высота к основанию MN. Определите вид траектории, по которой будет двигаться основание проведенной высоты, если перемещать точку M по стороне AB. Обоснуйте свой ответ.